Marek Materzok

Równania rekurencyjne na dziedzinach

Pomimo, iż poczyniłem starania, aby praca ta była możliwie kompletna i wolna od błędów, nie mogę zagwarantować, że nie wkradły się do niej żadne nieścisłości czy pomyłki. Czytać na własną odpowiedzialność.

1. Wprowadzenie

Będziemy zajmować się problemem znajdowania rozwiązań rekurencyjnych równań na dziedzinach. Interesować nas będą równania postaci $D \cong F(D)$. Motywującym przykładem jest zadanie semantyki denotacyjnej dla beztypowego rachunku lambda. Każda funkcja w beztypowym rachunku lambda może być argumentem dla dowolnej innej funkcji, wobec tego dziedzina, w której będziemy interpretować wyrażenia lambda, musi spełniać równanie $D \cong D \to D$.

2. Funktory i F-algebry

W teorii kategorii standardowym narzędziem służącym rozwiązywaniu rekurencyjnych zależności jest pojęcie F-algebry początkowej.

Definicja 2.1. Niech $F : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ będzie endofunktorem nad kategorią $\mathbf{K}$. F-algebrą nazywamy $\mathbf{K}$-obiekt A z morfizmem $f : F(A) \to A$. F-homomorfizmem z F-algebry $\langle A, f\rangle$ w F-algebrę $\langle B, g\rangle$ nazywamy $\mathbf{K}$-morfizm $h : A \to B$ taki, że $h \circ f = g \circ F(h)$.

Definicja 2.2. F-algebrę $\langle A, f\rangle$ nazywamy *początkową*, jeśli z każdej F-algebry $\langle B, g\rangle$ istnieje w nią unikalny F-homomorfizm.

Lemat 2.3. *Jeśli $\langle A, f\rangle$ jest F-algebrą początkową, to f jest izomorfizmem.*

Dowód. Rozważmy F-algebrę $\langle F(A), F(f)\rangle$. Niech $h : A- > F(A)$ będzie F-homomorfizmem. Z definicji F-homomorfizmu mamy $h \circ f = F(f) \circ F(h) = F(f \circ h)$. Ponieważ $(f \circ h) \circ f = f \circ (h \circ f) = f \circ F(f \circ h)$, $f \circ h$ jest F-automorfizmem, zatem $f \circ h = id_A$. Tym samym $h \circ f = F(f \circ h) = F(id_A) = id_{F(A)}$. Zatem $h = f^{-1}$. $\square$

Zatem jeśli znajdziemy kategorię, w której F będzie funktorem, a $\langle A, f\rangle$ F-algebrą początkową, to rozwiązaniem równania $D \cong F(D)$ jest A, natomiast f jest izomorfizmem między A i $F(A)$. Rozwiązanie równania jest więc z dokładnością do izomorfizmu.

Rozpatrzmy kategorię **CPO** porządków zupełnych i funkcji ciągłych. Niestety, ta dość naturalna kategoria nie jest odpowiednia dla naszych celów. Aby to ukazać, przyjrzyjmy się bliżej bifunktorowi $\to$.

Definicja 2.4. Bifunktor $\to$: $\mathbf{CPO} \times \mathbf{CPO} \to \mathbf{CPO}$ jest konstruktorem przestrzeni funkcji ciągłych. Mając dane **CPO**-morfizmy - funkcje ciągłe $f : A \to B$ i $g : C \to D$ działanie $\to$ na nich jest następujące: $(f \to g)(x) = g \circ x \circ f$, $f \to g : (B \to C) \to (A \to D)$. Zatem $\to$ jest kontrawariantny względem pierwszego argumentu i kowariantny względem drugiego.

Potraktujmy F z naszego przykładu motywującego, $F(D) = D \to D$, jako definicję funktora w **CPO**. Zatem z 2.4 wynika, że dla **CPO**-morfizmu $f : A \to B$ mamy $F(f) = f \to f : (B \to A) \to (A \to B)$. Aby F było funktorem, musi zachodzić $F(f) : F(A) \to F(B)$, czyli $F(f) : (A \to A) \to (B \to B)$.

Przyczyną problemu jest kontrawariantność $\to$ względem pierwszego argumentu. W związku z tym będziemy szukać kategorii z podobnym do $\to$ bifunktorem, który jednak będzie kowariantny względem obu argumentów.

3. R-pary

Definicja 3.1. Niech $f : D \to E$, $g : E \to D$ będą **CPO**-morfizmami. Parę $\langle f, g\rangle : D \leftrightarrow E$ nazywamy *r-parą.*

Dla r-par definiujemy operację złożenia ($\langle f_1, g_1\rangle \circ \langle f_2, g_2\rangle = \langle f_1 \circ f_2, g_2 \circ g_1\rangle$) *oraz odwracania* ($\langle f, g\rangle^{op} = \langle g, f\rangle$)*.*

Będę czasem pisać p^L*,* p^R *na oznaczenie składowych funkcji r-pary* ($p = \langle p^L, p^R\rangle$)*.*

Wobec tego porządki zupełne z r-parami jako morfizmami tworzą kategorię. Kategorię tę będziemy nazywać $\mathbf{CPO^R}$.

Udowodnimy szereg przydatnych własności r-par i kategorii $\mathbf{CPO^R}$.

Lemat 3.2. *Niech* $p : B \leftrightarrow C$, $q : A \leftrightarrow B$ *będą* $\mathbf{CPO^R}$*-morfizmami.*
1. ${id_A}^{op} = id_A$
2. $(p \circ q)^{op} = q^{op} \circ p^{op}$
3. $(p^{op})^{op} = p$

Dowód. Załóżmy, że $p = \langle f, g\rangle$ i $q = \langle f', g'\rangle$.
1. ${id_A}^{op} = \langle id_A, id_A\rangle^{op} = \langle id_A, id_A\rangle = id_A$
2. $(p \circ q)^{op} = (\langle f, g\rangle \circ \langle f', g'\rangle)^{op} = \langle f \circ f', g' \circ g\rangle^{op} = \langle g' \circ g, f \circ f'\rangle = \langle g', f'\rangle \circ \langle g, f\rangle = q^{op} \circ p^{op}$
3. $(p^{op})^{op} = (\langle f, g\rangle^{op})^{op} = \langle g, f\rangle^{op} = \langle f, g\rangle = p$

□

Lemat 3.3. $\mathbf{CPO^R}$ *jest identyczna z dualną kategorią* $\mathbf{CPO^R}^{op}$*.*

Dowód. Morfizmowi p w $\mathbf{CPO^R}$ odpowiada morfizm p^{op} w $\mathbf{CPO^R}^{op}$. □

Funktory nad **CPO** przenoszą się łatwo na kategorię $\mathbf{CPO^R}$, działając „po współrzędnych". W szczególności, dla dowolnego bifunktora $\oplus : \mathbf{CPO} \times \mathbf{CPO} \to \mathbf{CPO}$ istnieje bifunktor $\oplus^R : \mathbf{CPO^R} \times \mathbf{CPO^R} \to \mathbf{CPO^R}$ działający na obiektach tak samo, jak wyjściowy bifunktor $\oplus$, a na morfizmach zdefiniowany następująco: $\langle f, g\rangle \oplus^R \langle f', g'\rangle = \langle f \oplus f', g \oplus g'\rangle$.

Twierdzenie 3.4. *Zdefiniowane powyżej przekształcenie* $\oplus^R$ *jest bifunktorem oraz zachowuje wariantność bifunktora* $\oplus$ *względem obu argumentów.*

Dowód. Niech $i, j \in \{0, 1\}$ oznaczają ko- (0) lub kontrawariantność (1) bifunktora $\oplus$ względem pierwszego i drugiego argumentu.

1. Przekształcenie $\oplus^R$ zachowuje morfizmy identycznościowe..
$$\begin{aligned} id_A \oplus^R id_B &= \langle id_A, id_A\rangle \oplus^R \langle id_B, id_B\rangle = \langle id_A \oplus id_B, id_A \oplus id_B\rangle \\ &= \langle id_{A\oplus B}, id_{A\oplus B}\rangle = id_{A\oplus B} = id_{A\oplus^R B} \end{aligned}$$
2. Niech $p = \langle f, g\rangle : A_0 \leftrightarrow A_1$ i $r = \langle f', g'\rangle : B_0 \leftrightarrow B_1$ będą $\mathbf{CPO^R}$-morfizmami. Z założenia o wariantności $\oplus$ mamy $f \oplus f' : A_i \oplus B_j \to A_{1-i} \oplus B_{1-j}$. Zatem również $g \oplus g' : A_{1-i} \oplus B_{1-j} \to A_i \oplus B_j$. Z definicji $\oplus^R$ mamy $p \oplus^R r = \langle f \oplus f', g \oplus g'\rangle$, a zatem $p \oplus^R r : A_i \oplus^R B_j \leftrightarrow A_{1-i} \oplus^R B_{1-j}$.
3. Niech
$$\begin{aligned} p_0 &= \langle f_0, g_0\rangle : B \leftrightarrow C & p_1 &= \langle f_1, g_1\rangle : A \leftrightarrow B \\ r_0 &= \langle f'_0, g'_0\rangle : B' \leftrightarrow C' & r_1 &= \langle f'_1, g'_1\rangle : A' \leftrightarrow B' \end{aligned}$$
będą $\mathbf{CPO^R}$-morfizmami. Z założenia o wariantności $\oplus$ mamy $(f_0 \circ f_1) \oplus (f'_0 \circ f'_1) = (f_i \oplus f'_j) \circ (f_{1-i} \oplus f'_{1-j})$ i analogiczną równość dla g. Wtedy
$$\begin{aligned} (p_0 \circ p_1) \oplus^R (r_0 \circ r_1) &= (\langle f_0, g_0\rangle \circ \langle f_1, g_1\rangle) \oplus^R (\langle f'_0, g'_0\rangle \circ \langle f'_1, g'_1\rangle) \\ &= \langle f_0 \circ f_1, g_1 \circ f_0\rangle \oplus^R \langle f'_0 \circ f'_1, g'_1 \circ g'_0\rangle \\ &= \langle (f_0 \circ f_1) \oplus (f'_0 \circ f'_1), (g_1 \circ g_0) \oplus (g'_1 \circ g'_0)\rangle \\ &= \langle (f_i \oplus f'_j) \circ (f_{1-i} \oplus f'_{1-j}), (g_{1-i} \oplus g'_{1-j}) \circ (g_i \oplus g'_j)\rangle \\ &= \langle f_i \oplus f'_j, g_i \oplus g'_j\rangle \circ \langle f_{1-i} \oplus f'_{1-j}, g_{1-i} \oplus g'_{1-j}\rangle \\ &= (\langle f_i, g_i\rangle \oplus^R \langle f'_j, g'_j\rangle) \circ (\langle f_{1-i}, g_{1-i}\rangle \oplus^R \langle f'_{1-j}, g'_{1-j}\rangle) \\ &= (p_i \oplus^R r_j) \circ (p_{1-i} \oplus^R r_{1-j}) \end{aligned}$$

$\square$

Powyższy dowód można łatwo uogólnić do przypadku dowolnego n-arnego funktora.

Mając te wszystkie narzędzia, zdefiniujmy nowy bifunktor $\rightarrowtail$: $\mathbf{CPO^R} \times \mathbf{CPO^R} \to \mathbf{CPO^R}$. Niech na obiektach $A \rightarrowtail B = A \to B$, zaś na morfizmach $p \rightarrowtail r = p^{op} \to^R r$.

Twierdzenie 3.5. *Przekształcenie $\rightarrowtail$ jest bifunktorem kowariantnym względem obu argumentów.*

Dowód. Pokażę, że $\rightarrowtail$ posiada żądane własności.

1. Przekształcenie $\rightarrowtail$ zachowuje morfizmy identycznościowe.

$$id_X \rightarrowtail id_Y = {id_X}^{op} \to^R id_Y = id_X \to^R id_Y = id_{X \to^R Y} = id_{X \rightarrowtail Y}$$

2. Niech $p : A \leftrightarrow B$, $r : C \leftrightarrow D$ będą $\mathbf{CPO^R}$-morfizmami. Mamy $p \rightarrowtail r = p^{op} \to^R r : (A \rightarrowtail C) \leftrightarrow (B \rightarrowtail D)$.
3. Zostało jeszcze pokazać, że mając dane dwa $\mathbf{CPO^R}$-morfizmy $p : B \leftrightarrow C$, $r : A \leftrightarrow B$, $p' : B' \leftrightarrow C'$, $r' : A' \leftrightarrow B'$ mamy $(p \circ r) \rightarrowtail (p' \circ r') = (p \rightarrowtail p') \circ (r \rightarrowtail r')$.

$$\begin{aligned}(p \circ r) \rightarrowtail (p' \circ r') &= (p \circ r)^{op} \to^R (p' \circ r') = (r^{op} \circ p^{op}) \to^R (p' \circ r') \\ &= (p^{op} \to^R p') \circ (r^{op} \to^R r') = (p \rightarrowtail p') \circ (r \rightarrowtail r')\end{aligned}$$

$\square$

Powyższą konstrukcję można uogólnić do dowolnego n-funktora kontrawariantnego F względem dowolnej liczby argumentów. Odpowiadający mu n-funktor kowariantny w $\mathbf{CPO^R}$ będziemy nazywać F^{R_K}. (Zatem $\rightarrowtail = \to^{R_K}$).

To rozwiązuje nasze wcześniejsze problemy. Potraktujmy $F(D) = D \to D$ jako definicję funktora w $\mathbf{CPO^R}$, podstawiając $\rightarrowtail$ za $\to$. Wtedy dla $\mathbf{CPO^R}$-morfizmu $f : A \leftrightarrow B$ mamy $F(f) = f \rightarrowtail f : (A \rightarrowtail A) \leftrightarrow (B \rightarrowtail B)$, co zgadza się z definicją funktora.

W ogólności, mając daną funkcję F zdefiniowaną na obiektach $\mathbf{CPO}$ przy pomocy funktorów nad $\mathbf{CPO}$, można indukcyjnie pokazać, że można przyporządkować jej funktor $G : \mathbf{CPO^R} \to \mathbf{CPO^R}$, zamieniając w definicji F użycie każdego funktora H na H^{R_K}. Działanie funktora G na obiektach jest identyczne, jak funkcji F.

4. Pary projekcyjne

Mamy już sposób, w jaki z równania rekurencyjnego $D = F(D)$ można uzyskać funktor F nad $\mathbf{CPO^R}$. Wciąż jednak nie jest jasne, jak szukać F-algebry początkowej, czyli rozwiązania naszego równania na dziedzinach. W tym celu odtworzymy znane pojęcia porządku zupełnego i funkcji ciągłej.

Definicja 4.1. *Parą projekcyjną* nazywać będziemy r-parę $\langle f, g\rangle : A \leftrightarrow B$ taką, że $g \circ f = id_A$ oraz $f \circ g \sqsubseteq id_B$. Funkcję f będziemy nazywać *włożeniem*, a funkcję g *projekcją*. Będziemy pisać $\langle f, g\rangle : A \lhd B$.

Pary projekcyjne mają następującą bardzo istotną własność.

Lemat 4.2. *Niech $\langle f, g\rangle : A \lhd B$ będzie parą projekcyjną. Wtedy zarówno f, jak i g są strict. Jeśli $\langle f', g'\rangle : A \lhd B$, to $f \sqsubseteq f'$ wtw $g' \sqsubseteq g$.*

Dowód. Mamy $f(\bot_A) \sqsubseteq (f \circ g)(\bot_B) \sqsubseteq \bot_B$, zatem f jest strict. Podobnie $g(\bot_B) \sqsubseteq (g \circ f)(\bot_A) = \bot_A$, więc g również jest strict.

Przy założeniu, że $f \sqsubseteq f'$ mamy $g' = g \circ f \circ g' \sqsubseteq g \circ f' \circ g' \sqsubseteq g$. Podobnie, zakładając, że $g' \sqsubseteq g$, mamy $f = f \circ g' \circ f' \sqsubseteq f \circ g \circ f' \sqsubseteq f'$. $\square$

Z drugiej części powyższego lematu wynika, że każda projekcja posiada unikalne włożenie oraz że każde włożenie posiada unikalną projekcję.

O parach projekcyjnych można myśleć, że zadają „praporządek zupełny” na porządkach zupełnych. Istnienie pary projekcyjnej $A \lhd B$ w pewnym sensie oznacza, że w B można zapisać co najmniej te same wartości, co w A.

Lemat 4.3. *Zachodzą następujące fakty:*

1. $id_A : A \lhd A$

2. Niech $p : B \lhd C$ i $q : A \lhd B$. Wtedy $p \circ q : A \lhd C$.
3. Dla każdego porządku zupełnego A istnieje dokładnie jedna para projekcyjna $!_A : 1 \lhd A$, gdzie 1 jest porządkiem jednoelementowym.

Dowód. 1. Mamy $id_A = \langle id_A, id_A \rangle$, $id_A \circ id_A \sqsubseteq id_A$.
2. Mamy $p \circ q = \langle p^L \circ q^L, q^R \circ p^R \rangle$. Zatem $q^R \circ p^R \circ p^L \circ q^L = q^R \circ q^L = id_A$ oraz $p^L \circ q^L \circ q^R \circ p^R \sqsubseteq p^L \circ p^R \sqsubseteq id_C$.
3. Przyjmijmy, że $!_A = \langle const\bot_A, const\bot_1$. Mamy $const\bot_1 \circ const\bot_A = id_1$, ponieważ id_1 jest jedyną funkcją z 1 w 1. Również $(const\bot_A \circ const\bot_1)(x_A) = \bot_A \sqsubseteq x_A$, co daje $const\bot_A \circ const\bot_1 \sqsubseteq id_A$. Jedyność $!_A$ wynika z tego, że $const\bot_A$ jest jedyną funkcją strict z 1 w A.

□

Pary projekcyjne tworzą więc kategorię **Proj**, będącą podkategorią $\mathbf{CPO}^{\mathbf{R}}$.

Definicja 4.4. Funktor n-arny F nad **CPO** nazywamy lokalnie monotonicznym, jeśli $1 \leqslant i \leqslant n$ $f_i \sqsubseteq f_i'$ implikuje $F(f_1, \ldots, f_n) \sqsubseteq F(f_1', \ldots, f_n')$

Lemat 4.5. *Funktory projekcyjne, stałe oraz funktory $+$, $\times$, $\to$ są lokalnie monotoniczne.*

Dowód. Nietrudny i mało istotny dla naszych rozważań. □

Lemat 4.6. *Niech $F : (\mathbf{CPO})^n \to \mathbf{CPO}$ będzie funktorem lokalnie monotonicznym. Wtedy $F^{R_k} : \mathbf{Proj}^n \to \mathbf{Proj}$.*

Dowód. Dla uproszczenia prezentacji przedstawię dowód dla funktora $\to$. Dowód ten można łatwo uogólnić.

Niech $p : A \lhd B$, $r : C \lhd D$ będą parami projekcyjnymi. Pokażę, że $p \rightarrowtail r = \langle p^R \to r^L, p^L \to r^R \rangle : (A \to C) \leftrightarrow (B \to D)$ też jest parą projekcyjną.

Własność włożeń jest łatwa do pokazania.

$$(p^L \to r^R) \circ (p^R \to r^L) = (p^R \circ p^L) \to (r^R \circ r^L) = id_A \to id_C = id_{A \to C}$$

Wykazanie własności projekcji wymaga zaś skorzystania z lokalnej monotoniczności.

$$(p^R \to r^L) \circ (p^L \to r^R) = (p^L \circ p^R) \to (r^L \circ r^R) \sqsubseteq id_B \to id_D = id_{B \to D}$$

□

To wystarcza do pokazania, że nasza przykładowa funkcja na dziedzinach $F(D) = D \to D$ może być traktowana jako endofunktor nad kategorią par projekcyjnych **Proj**. Kontynuując analogię między parami projekcyjnymi i porządkami zupełnymi, własność działania funktora na morfizmach można interpretować jako własność monotoniczności.

5. Kostożki, kogranice

Odpowiednikiem pojęcia ograniczenia górnego jest pojęcie *kostożka.*

Definicja 5.1. Niech **C** będzie kategorią, niech $\mathcal{A}$ będzie pewnym zbiorem **C**-obiektów, a $\mathcal{F}$ pewnym zbiorem **C**-morfizmów pomiędzy obiektami z $\mathcal{A}$. Kostożkiem będziemy nazywać **C**-obiekt X oraz strzałki $g_A : A \to X$ (po jednej dla każdego obiektu A z $\mathcal{A}$) takie, że dla każdej strzałki $f : A \to B$ z $\mathcal{F}$ zachodzi $g_A = g_B \circ f$.

Najmniejszemu ograniczeniu górnemu odpowiada zaś pojęcie *kogranicy.*

Definicja 5.2. Niech $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ będą jak w definicji wyżej. Kostożek X, $\{g_A\}$ nazywamy kogranicą, jeśli dla każdego innego kostożka Y, $\{h_A\}$ istnieje unikalny **C**-morfizm $k : X \to Y$ taki, że dla każdego A z $\mathcal{A}$ zachodzi $k \circ g_A = h_A$.

Zdefiniujemy teraz odpowiednik pojęcia ω-łańcucha w teorii kategorii.

Definicja 5.3. Niech **C** będzie kategorią. Wtedy ω-łańcuchem będziemy nazywać ciąg **C**-obiektów A_i oraz **C**-morfizmów $f_i : A_i \to A_{i+1}$ $(i \in \mathbb{N})$.

Poniżej będziemy się zajmować kostożkami i kogranicami wyłącznie w kategorii par projekcyjnych **Proj**. Na początek wskażę prosty warunek konieczny i wystarczający, aby dany kostożek był kogranicą.

Lemat 5.4. *Niech $\{A_i\}$, $\{p_i\}$ będzie ω-łańcuchem. Niech X, $\{r_i\}$ będzie kostożkiem takim, że $\bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R = id_X$. Wtedy ów kostożek jest kogranicą.*

Dowód. Niech Y, $\{s_i\}$ będzie dowolnym kostożkiem. Zdefiniujmy $k = \langle \bigsqcup_i s_i^L \circ r_i^R, \bigsqcup_i r_i^L \circ s_i^R \rangle : X \leftrightarrow Y$.
Pokażę, że k jest parą retrakcyjną.

$$(\bigsqcup_i r_i^L \circ s_i^R) \circ (\bigsqcup_i s_i^L \circ r_i^R) = \bigsqcup_i r_i^L \circ s_i^R \circ s_i^L \circ r_i^R = \bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R = id_X$$
$$(\bigsqcup_i s_i^L \circ r_i^R) \circ (\bigsqcup_i r_i^L \circ s_i^R) = \bigsqcup_i s_i^L \circ r_i^R \circ r_i^L \circ s_i^R = \bigsqcup_i s_i^L \circ s_i^R \sqsubseteq id_Y$$

Pokazę teraz, że k spełnia warunek $k \circ r_i = s_i$.

$$k \circ r_i = \langle \bigsqcup_i s_i^L \circ r_i^R, \bigsqcup_i r_i^L \circ s_i^R \rangle \circ \langle r_i^L, r_i^R \rangle = \langle \bigsqcup_{j \geqslant i} s_j^L \circ r_j^R \circ r_i^L, \bigsqcup_{j \geqslant i} r_i^R \circ r_j^L \circ s_j^R \rangle$$
$$= \langle \bigsqcup_{j \geqslant i} s_j^L \circ r_j^R \circ r_j^L \circ p_{j-1}^L \circ \ldots \circ p_i^L, \bigsqcup_{j \geqslant i} p_i^R \circ \ldots \circ p_{j-1}^R \circ r_j^R \circ r_j^L \circ s_j^R \rangle$$
$$= \langle \bigsqcup_{j \geqslant i} s_j^L \circ p_{j-1}^L \circ \ldots \circ p_i^L, \bigsqcup_{j \geqslant i} p_i^R \circ \ldots \circ p_{j-1}^R \circ s_j^R \rangle = \langle \bigsqcup_{j \geqslant i} s_i^L, \bigsqcup_{j \geqslant i} s_i^R \rangle = \langle s_i^L, s_i^R \rangle = s_i$$

Zostało pokazać, że k jest unikalne. Niech $l : X \lhd Y$ spełnia warunek $l \circ r_i = s_i$.

$$l = l \circ id_X = \langle l^L, l^R \rangle \circ \langle \bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R, \bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R \rangle = \langle \bigsqcup_i l^L \circ r_i^L \circ r_i^R, \bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R \circ l^R \rangle$$
$$= \langle \bigsqcup_i s_i^L \circ r_i^R, \bigsqcup_i r_i^L \circ s_i^R \rangle = k$$

□

Zgodnie z naszą analogią w tej kategorii kogranice ω-łańcuchów zawsze istnieją.

Lemat 5.5. *Niech $\{A_i\}$, $\{p_i\}$ będzie ω-łańcuchem. Wtedy istnieje kostożek X, $\{r_i\}$ spełniający warunek z poprzedniego lematu.*

Dowód. Niech $X = \{x \in \prod_i A_i : \forall_i x_i = p_i^R(x_{i+1})\}$ z porządkiem po współrzędnych, $r_i^L(x)_i = x$, $r_i^L(x)_j = p_{j-1}^L(r_i^L(x)_{j-1})$ dla $j > i$, $r_i^R(x) = x_i$.

Pokażę, że powyższe jest stożkiem. Morfizmy r_i są oczywiście parami projekcyjnymi. Ponadto dla dowolnego i mamy $(p_i^R \circ r_{i+1}^R)(x) = p_i^R(x_{i+1}) = x_i = r_i^R(x)$, z lematu 4.2 można pokazać $r_{i+1}^L \circ p_i^L = r_i^L$.

Z jednej strony mamy $r_i^L \circ r_i^R \sqsubseteq id_D$, z drugiej $r_j^L(r_j^R(x))_j = r_j^L(x_j)_j = x_j$, z czego wynika, że $\bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R = id_X$. □

Lemat 5.6. *Niech $\{A_i\}$, $\{p_i\}$ będzie ω-łańcuchem, niech Y, $\{s_i\}$ będzie kogranicą. Wtedy $\bigsqcup_i s_i^L \circ s_i^R = id_Y$.*

Dowód. Z lematu powyżej istnieje kogranica X, $\{r_i\}$, istnieje więc też izomorfizm $\Phi : X \lhd Y$. Tym samym mamy $\bigsqcup_i s_i^L \circ s_i^R = \bigsqcup_i \Phi^L \circ r_i^L \circ r_i^R \circ \Phi^R = \Phi^L \circ (\bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R) \circ \Phi^R = \Phi^L \circ \Phi^R = id_Y$. □

Tym samym pokazaliśmy, że na kategorię **Proj** można patrzeć jak na „praporządek zupełny". Kategoria, w której zamiast porządków zupełnych obiektami byłyby klasy abstrakcji porządków zupełnych względem izomorfizmu, spełniałaby wszystkie warunki bycia porządkiem zupełnym, byłaby więc w pewnym sensie porządkiem zupełnym porządków zupełnych.

6. Ciągłość

Funktorem ciągłym będziemy nazywać funktor zachowujący kogranice ω-łańcuchów.

Definicja 6.1. Niech $F : \mathbf{A_1} \times \ldots \times \mathbf{A_n} \to \mathbf{B}$ będzie funktorem. Funktor F nazywamy ciągłym, jeśli dla dowolnych kogranic X_i, $\{g_{iA_i}\}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ $F(X_1, \ldots, X_n)$, $\{F(g_{1A_1}, \ldots, g_{nA_n})\}$ również jest kogranicą.

Definicja 6.2. Funktor n-arny F nad **CPO** nazywamy lokalnie ciągłym, jeśli dla dowolnych ciągów rosnących funkcji ciągłych f_l^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ciąg $F(f_l^1, \ldots, f_l^n)$ jest ciągiem rosnącym funkcji ciągłych, którego kresem górnym jest $F(\bigsqcup_l f_l^1, \ldots, \bigsqcup_l f_l^n)$.

Fakt 6.3. *Funktory projekcyjne, stałe oraz funktory $+$, $\times$, $\to$ są lokalnie ciągłe.*

Lemat 6.4. *Niech F będzie lokalnie ciągłym n-funktorem. Wtedy funktor F^{R_K} jest ciągły.*

Dowód. Dowód przeprowadzę na przykładzie funktora $\to$.

Niech X, $\{r_i\}$ oraz Y, $\{s_i\}$ będą kogranicami pewnego ω-łańcucha.

$$\begin{aligned}\bigsqcup_i (r_i \rightarrowtail s_i)^L \circ (r_i \rightarrowtail s_i)^R &= \bigsqcup_i (r_i^{op} \to^R s_i)^L \circ (r_i^{op} \to^R s_i)^R = \bigsqcup_i (r_i^R \to s_i^L) \circ (r_i^L \to s_i^R) \\ &= \bigsqcup_i (r_i^L \circ r_i^R) \to (s_i^L \circ s_i^R) = (\bigsqcup_i r_i^L \circ r_i^R) \to (\bigsqcup_i s_i^L \circ s_i^R) \\ &= id_X \to id_Y = id_{X \rightarrowtail Y}\end{aligned}$$

Z lematu 5.4 kostożek $X \rightarrowtail Y$, $\{r_i \rightarrowtail s_i\}$ jest kogranicą. □

Fakt 6.5. *Złożenie funktorów ciągłych jest ciągłe.*

Z powyższych faktów wynika między innymi, że nasza przykładowa funkcja na dziedzinach $F(D) = D \to D$ traktowana jako funktor nad **Proj** jest ciągła.

7. Istnienie F-algebry początkowej

Można teraz już sformułować twierdzenie będące odpowiednikiem twierdzenia o punkcie stałym.

Twierdzenie 7.1. *Niech F : **Proj** $\to$ **Proj** będzie funktorem ciągłym. Wtedy istnieje F-algebra $\langle Fix_F, \eta_F \rangle$, gdzie $f : F(Fix_F) \lhd Fix_F$ jest izomorfizmem.*

Dowód. Niech $A_0 = 1$, $A_{i+1} = F(A_i)$, $p_0 = \langle \bot, !_{F(1)} \rangle$, $p_{i+1} = F(p_i)$, $\{A_i\}$, $\{p_i\}$ jest ω-łańcuchem. Z lematu 5.5 istnieje jego kogranica Fix_F, $\{\rho_i\}$. Ponieważ F ciągły, $F(Fix_F)$, $\{F(\rho_i)\}$ jest kogranicą ω-łańcucha $\{A_{i+1}\}$, $\{p_{i+1}\}$. Tym samym jest też kogranicą $\{A_i\}$, $\{p_i\}$. W związku z tym istnieje izomorfizm $\eta_F : F(Fix_F) \lhd Fix_F$. □

Twierdzenie 7.2. *F-algebra z twierdzenia 7.1 jest początkowa.*

Dowód. Niech $\langle X, \alpha \rangle$ będzie F-algebrą. Wskażę homomorfizm $h : Fix_F \lhd X$.

Niech $\rho'_i : A_i \lhd X$ będą zdefiniowane następująco: $\rho'_0 = \bot$, $\rho'_{i+1} = \alpha \circ F(\rho'_i)$. Dla każdego i zachodzi $\rho'_i = \rho'_{i+1} \circ p_i$, dowód przez indukcję: $\rho'_1 \circ p_0 = \rho'_1 \circ \bot = \bot = \rho'_0$, $\rho'_{i+2} \circ p_{i+1} = \alpha \circ F(\rho'_{i+1}) \circ F(p_i) = \alpha \circ F(\rho'_{i+1} \circ p_i) = \alpha \circ F(\rho'_i) = \rho_{i+1}$.

W związku z tym $X, \{\rho'_i\}$ jest kostożkiem, a zatem istnieje dokładnie jedno $h : Fix_F \lhd X$ takie, że dla każdego i zachodzi $\rho'_i = h \circ \rho_i$. Pokażę, że h jest homomorfizmem, to znaczy, że $h \circ \eta_F = \alpha \circ F(h)$. W tym celu pokażę, że $h \circ \eta_F$ i $\alpha \circ F(h)$ oba są mediatorami pomiędzy kogranicą $F(Fix_F), \{F(\rho_i)\}$ i kostożkiem $X, \{\rho'_{i+1}\}$. Aby pokazać, że $h \circ \eta_F$ jest mediatorem dla $F(Fix_F)$ i X, wystarczy skorzystać z faktu, że η_F jest mediatorem dla $F(Fix_F)$ i Fix_F, a h mediatorem dla Fix_F i X. Pokazanie, że $\alpha \circ F(h)$ również nie jest kłopotliwe.

Ponieważ $h \circ \rho_0 = \bot$ i $h \circ \rho_{i+1} = h \circ \eta_F \circ F(\rho_i) = \alpha \circ F(h) \circ F(\rho_i) = \alpha \circ F(h \circ \rho_i)$, $h \circ \rho_i$ jest jednoznacznie określone. Ponieważ $h^L = h^L \circ id_{Fix_F} = h^L \circ \bigsqcup_i \rho_i^L \circ \rho_i^R = \bigsqcup_i (h^L \circ \rho_i^L) \circ \rho_i^R$, również samo h jest jednoznacznie określone. □

8. Podsumowanie

Przy tworzeniu tego opracowania opierałem się na rozdziałach 4 i 5 książki [1] Plotkina na temat dziedzin, rozdziale 3.4 książki [2] Pierce'a na temat teorii kategorii, rozdziale 11 książki [4] Schmidta na temat semantyki denotacyjnej oraz pracy [3] Wagnera o rozwiązywaniu równań rekurencyjnych na dziedzinach. Powstawało ono w miarę, jak czytałem dowody przedstawionego twierdzenia, jako pomoc w ich zrozumieniu. W związku z tym niewykluczone są pewne nieścisłości i błędy.

Literatura

[1] Gordon Plotkin, *Domains*. University of Edinburgh, 1983.

[2] Benjamin C. Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientists*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.

[3] Kim R. Wagner, *Solving Recursive Domain Equations with Enriched Categories*. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1994.

[4] David A. Schmidt, *Denotational Semantics. A methodology for language development*. Kansas State University, Manhattan, 1997.